HILBERT versus EUCLIDES

Reflexions sobre els *Elements*

llibres I, II, III, IV, V i VI

Josep PLA I CARRERA
Professor emèrit
Universitat de Barcelona

Facultat de Matemàtiques
Aula Magna
Universitat de Barcelona

Barcelona, 3 d'abril del 2019


US VOLEM A CASA!

Kurt GÖDEL

Kurt GÖDEL

Brünn
[Österreich-Ungarn
Imperi Austrohongarès]
28 d'abril del 1906

Princeton
[Nova Jersey
Estats Units d'Amèrica]
14 de gener del 1978

L'any 1930, amb només vint-i-quatre anys, enunciava la **incompletesa de l'aritmètica de Peano en primer ordre**

David HILBERT

David HILBERT

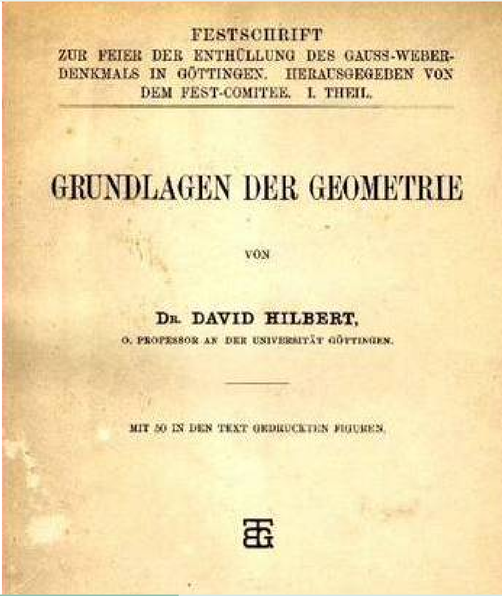
Königsberg
[Prússia Oriental]
23 de gener del 1862

Göttingen
[Alemanya]
14 de febrer del 1943

Grundlagen der Geometrie

Lany 1899 va publicar *Grundlagen der Geometrie*, un estudi sistemàtic de la **geometria clàssica**, basat en l'**enfocament axiomàtic**; és a dir, **en** els **seus vint-i-un axiomes bàsics** i **en** els principis de la lògica.

Aquest text va suposar una revolució conceptual: era la llavor del ***formalisme hilbertià***. Es pot considerar una de les obres matemàtiques més influents del segle XX.


FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

INTRODUCCIÓ. La construcció de la Geometria, i de l'Aritmètica, **només** necessita unes poques i senzilles proposicions fonamentals.

Aquestes proposicions fonamentals s'anomenen **axiomes** de la Geometria. Posar-los de manifest i esbrinar-ne les connexions, és un problema que s'ha discutit des del temps d'EUCLIDES en nombrosos i excel·lents treballs de literatura matemàtica. Aquest problema es redueix, doncs, a l'anàlisi lògica de les nostres intuïcions espacials.

Aquest assaig és una nova investigació per construir la Geometria sobre un sistema **complet** d'axiomes, el **més senzill** possible, deduint-ne els teoremes més importants.

Bibliografia succinta

[Dor 2012] Carlos DORCE. *Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia al Renaixement*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

[Efi 1981] E. ÉFIMOV. Traducció francesa del rus d'E. Makho, *Géométrrie Superieur*. Moscú: Mir.

[Euc III aC] EUCLIDES. *Elements*. Vegeu (Pla 2018).

[Hil 1899] David HILBERT. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Druck und Verlag. Edició castellana, *Los fundamentos de la geometría*. Consejo superior de investigaciones científicas. Madrid, . Reeditat el 1996. En línia a <https://www.scribd.com/document/325919339/Grundlagen-Der-Geometrie>.

[Pla 2018] Josep PLA. *Història de la matemàtica: Grècia IIa (els Elements d'Euclides, llibres I, II, III, IV, V i VI. Resultats, textos i contextos*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans.

[Rev 2000] Agustí REVENTÓS. *Geometria axiomàtica*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. En línia a <https://books.google.es/books?id=EDQeDQAAQBAJ&printsec>.

EUCLIDES

Εὐκλείδης

?, ∼325 aC -

Alexandria [Egipte], 265 aC

Els *Elements*

Llibres I, II, III, IV, V i VI

Un text de Procle

Comentaris al llibre primer del Elements:

Qui vol cultivar la geometria ha de saber que cal aixecar-se per damunt d'un teorema per passar a un altre i **elevar així l'ànima cap a les altures** i no baixar mai a les coses sensibles ni fer-ne l'ús que habitualment en fan els mortals, i **no oblidar que el més interessant és l'evolució**.

Breu presentació dels *Elements*

Algunes definicions

Exemples de definicions fàcils

Elements

Punt és allò que no té cap part.

Línia és una longitud sense amplada.

Els extrems d'una línia són punts. $(*)$

Línia recta és la que jau igualment damunt els propis punts. $(*)$

⋮

Frontera és l'extrem de quelcom.

Figura és allò que té extrems. $(*)$

Grundlagen der Geometrie

EXPLICACIÓ. **Pensem** en dos [o tres] sistemes diferents d'objectes: els **punts** $A, B, C, \cdots$; les **rectes** $a, b, c, \cdots$ [; els plans $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$].

Però, HILBERT diu: Podríem parlar de taules, cadires i gerres de cervesa.

Exemples de definicions fàcils

Elements

Angle pla és la inclinació de dues línies, una damunt de l'altra.

Angle recte Quan la inclinació d'un segment en un altre determina ***dos angles iguals***, tots dos són **angles rectes**.

Grundlagen der Geometrie

Després de III-3, HILBERT defineix **angle**.

En un pla α tenim dos se- miraigs h, k diferents que parteixen del punt O de α i que pertanyen a rectes diferents. Al sistema d'aquests dos semiraigs l'anomenen un **angle**.

I després, al final dels **axiomes III-3**, dona la definició d'**angle recte** que coincideix amb la dels *Elements*.

Exemples de definicions fàcils

Elements

Cercle és una figura plana limitada per una corba —anomenada **circumferència**— de manera que **tots** els segments que uneixen un **punt de l'interior**-–que s'anomena **centre**— amb els de la circumferència són **iguals**.

Un **diàmetre** d'un cercle és qualsevol línia que passa pel centre i està **limitada**, en tots dos costats, per la circumferència. Aquesta recta divideix el cercle en dues parts iguals.($*$)

Grundlagen der Geometrie

HILBERT **no** introdueix la **circumferència** fins ben entrat el text.

Ho fa després d'haver introduït el postulat de les paral·leles [(Hil 1899), p. 33-34 de l'edició castellana].

Els postulats **neutrals** dels *Elements*

Els postulats **neutrals** dels *Elements*

Elements

GEOMETRIA NUETRAL

Postulats d'existència

Postulat 1. Es pot fer un **segment** que vagi d'un punt a un altre punt.

Postulat 3. Es pot fer una **circumferència** amb el centre en un punt donat i de radi un segment donat.

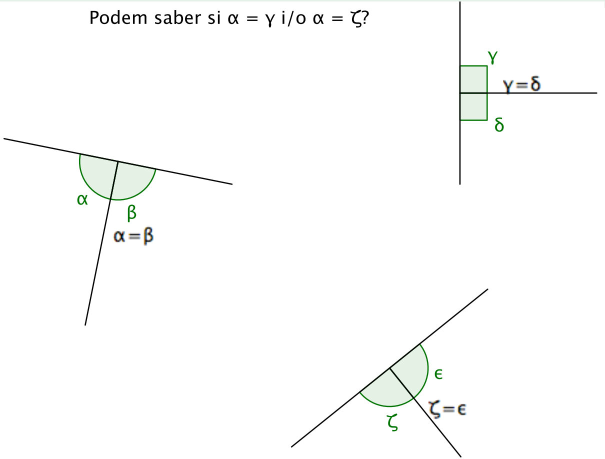
Postulat operatiu [no deformatiu]

Postulat 2. Tota recta **es pot perllongar** una recta limitada [per qualsevol extrem].

Postulat d'igualtat

Postulat 4. Tots els angles rectes són iguals.

Consideracions de l'angle recte



Grundlagen der Geometrie

Aquest postulat es transforma en el teorema 21. Calen els tres primers grups d'axiomes. També demostra que l'angle recte **existeix**.

Els axiomes **neutrals** dels *Grundlagen*

Els axiomes **neutrals** del *Grundlagen*

EXPLICACIÓ. Concebem els punts, rectes [i plans] en certes relacions recíproques: **estar situat a**, **entre**, **congruent**, **paral·lel** i **continu**. La descripció completa d'aquestes relacions de cara als fins matemàtics resulta dels **axiomes de la Geometria**.

Els axiomes els divideixen en conc grups:

I. **1-8**. Axiomes d'***enllaç***.
II. **1-4**. Axiomes d'***ordenació***.
III. **1-5**. Axiomes de ***congruència***.
IV. Axiomes de les ***paral·leles***.
V. **1-2**. Axiomes de ***continuïtat***.

Quatre axiomes **neutrals** dels *Grundlagen*

Grundlagen der Geometrie

I-1. Donats dos punts A, B existeix sempre una **recta** a, que amb cada un dels dos punts, A, B, es correspon mútuament.

$$\forall x_1 \forall x_2 \Big((P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge x_1 \neq x_2) \rightarrow \exists y (R(y) \wedge x_1 \in y \wedge x_2 \in y) \Big)$$

I-3. Damunt de cada recta hi ha almenys **dos** punts.

$$\forall y \Big(R(y) \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \in y \wedge x_2 \in y) \Big)$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall y \Big(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge R(y)$$

Hi ha **tres** punts que no estan alineats.

$$\rightarrow (x_1 \neq x_2 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge x_3 \neq x_1 \wedge x_1 \in y \wedge x_2 \in y) \rightarrow (x_3 \notin y) \Big)$$

Les **nocions comunes** dels *Elements*

N c 1 Dues coses iguals entre a una tercera són iguals entre si.

Grundlagen der Geometrie

III-2. Considerem tres parelles de punts A, B; A', B'; A'', B''. Si $A'B' \equiv AB$ i $A''B'' \equiv AB$, aleshores $A'B' \equiv A''B''$.

Nc 2 i **3** Si afegim [sostraiem] coses iguals a coses iguals s'obtenen coses iguals.

Nc 4 Les coses que **coincideixen** són iguals.

Nc 5 El tot és **més gran** que la part.

⋮

N c 9 Dos segments rectilinis amb els mateixos extrems **no contenen** mai una àrea.

Grundlagen der Geometrie

I-2. Donats dos punts A, B **només** existeix **una recta** a, que es correspon mútuament amb cada un dels dos punts, A, B.

L'existència en la geometria

L'**existència** als *Elements* i als *Grundlagen*

EUCLIDES

A la mentalitat grega, i per tant als *Elements*, l'**existència** està íntimament vinculada a la construcció i la construcció a les eines permeses: el **regle** i el **compàs**.

S'afirma que és una condició que s'imposà a l'Acadèmia de PLATÓ.

HILBERT

En canvi, per a HILBERT, l'**existència** la imposa el llenguatge formal, és a dir, la paraula existeix o el símbol $\exists x$ **només** té sentit si el sistema axiomàtic és **consistent** —la **condició indispensable**.

FREGE

Això el portarà a un enfrontament filosòfic amb FREGE que afirma que la veritat és **absoluta** i deriva de la dels axiomes.

Per tant, si la geometria euclidiana és vertadera, les altres hagin de ser falses.

L'**existència** als *Elements*

Elements

Existeixen:

El **triangle equilàter** de costat donat AB.
El **quadrat** de costat donat AB.
El **pentàgon** i el **pentadecàgon** regulars de costat donat AB.

I òbviament, l'**hexàgon**, **octogon**, **decàgon regulars** i tots els que s'obtenen dels que ja existeixen doblant el nombre de costats.

Donats tres segments arbitrais, **existeix** el **triangle que els té com costats**. Cal un diorisma.

Existeix el **rectangle** de costats donats AB i CD**?**

I el **paral·lelogram** de costats donats AB i CD**?**

Existeixen els **polígons regulars** de **set**, **nou**, **onze**, **tretze**, **disset**, **dinou**, **vint-i-un**, etc. de costat donat AB **?**

L'**existència constructiva** als *Grundlagen*

Grundlagen

El capítol VII —que tanca l'obra del prussià—tracta de «les construccions geomètriques fundades en els axiomes I-IV».

Recorre, però, al regle i al **patró** —és un instrument que permet transportar un únic segment.

Després d'establir que és possible resoldre els cinc problemes que havia trobat abans, dona el «**criteri de resolubilitat dels problemes geomètrics amb regle i patró**» però ho fa, com és natural, reduint-lo a una qüestió de l'univers de l'àlgebra.

També es pregunta: Amb el **regle i el padró** es pot construir el mateix que amb **el regle i el compàs**?

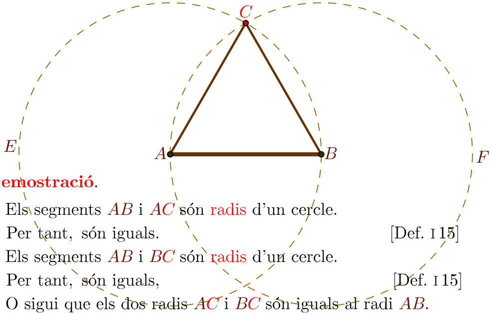
La resposta és **negativa**. **No és possible** construir el triangle rectangle d'hipotenusa 1 i un catet de longituf $|\sqrt{2}| - 1$.

Les proposicions de la geometria

El problema 1 [proposició 1 del llibre I]

Construcció.

1. Amb centre en el punt A, tirem el cercle que passa pel punt B. [$P3$]
2. Amb centre en el punt B, tirem el cercle que passa pel punt A. [$P3$]
3. Aquests dos cercles **es tallen en punt C**. [?]
4. Unim el punt C amb els punts A i B.
5. La figura trilàtera $\triangle ACB$ **és** el **triangle equilàter** de costat AB.



Demostració.

1. Els segments AB i AC són radis d'un cercle.
   Per tant, són iguals. [Def. I 15]
2. Els segments AB i BC són radis d'un cercle.
   Per tant, són iguals, [Def. I 15]
3. O sigui que els dos radis AC i BC són iguals al radi AB.
4. I dos coses iguals a una tercera són iguals entre si. [Nc. 1]
5. En definitiva, els tres costats AB, AC i BC són iguals.
6. La figura $\triangle ACB$ és un triangle equilàter. [Def. I 20]

Els problemes 2 i 3 [proposicions 2 i 3 del llibre I]

Elements

EUCLIDES necessita la proposició 1, no només per establir l'existència del triangle equilàter, sinó també com una **eina de construcció** —de fet, una **eina de transport de segments**— indispensable, com palesa la proposició 2:

Prop. 2. *Volem portar a un punt donat [com a extrem] un segment igual a un [segment] donat.*

És a dir, donat un punt O i un segment AB, volem construir un segment OP amb $OP = AB$. Se'n dedueix com a *porisma* immediat:

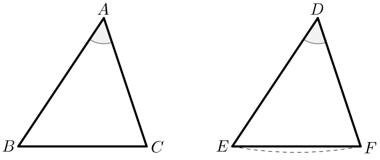
Prop. 3. *Donats dos segments diferents, volem treure el petit del gran.*

Grundlagen

III-1. *Siguin A i B dos punts d'una recta a i A' un altre punt d'aquesta recta o d'una altra diferent a'. Sempre **podem trobar** a un dels costats determinats pel punt A' a la recta a', un **únic punt** B' de manera que els segments $A'B'$ sigui congruent a AB. És a dir, $A'B' \equiv AB$.*

Elements

Prop. 4 (CAC). *Si dos triangles tenen dos costats iguals i també l'angle que contenen, aleshores aquests triangles tenen les bases iguals. A més, també són iguals els dos triangles i el angles corresponents.*

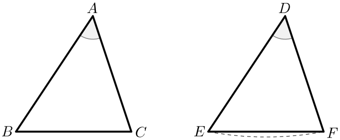


a_1. Col·loquem el punt A damunt del D.
a_2. Superposem els segments AB i DE.
a_3. Aleshores, els B i E coincideixen.
b_1. Atès que els angles $\widehat{BAC}$ i $\widehat{EDF}$ són iguals, el segment AC cau sobre el DF.
c_1. Però, els segments AC i DF són iguals.
c_2. Per tant, el punt C cau sobre F.
d. Això fa que el segment BC coincideixi amb el segment EF ja que **altrament** dos segments amb els mateixos extrems contindrien una àrea. I això és impossible!

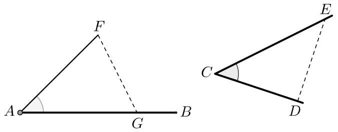
Prop. 8 (CCC). *Dos triangles amb els tres costats iguals són iguals.*

Usa la mateixa tècnica.

Grundlagen



III-5. *Si dos triangles* $\triangle BAC$ *i* $\triangle EDF$ *compleixen* $AB \equiv DE$ *i* $AC \equiv DF$ *i* $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$, *aleshores* $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DEF}$.



Prop. 23 *Sobre un segment donat $[CD]$ i en un punt donat del segment $[C]$, volem construir-hi un angle rectilini $[\widehat{DCE}]$ igual a un angle rectilini donat $[\widehat{BAD}]$.*

1. Primer determina un triangle $\triangle FAG$.
2. *Donats tres segments és possible fer un triangle que tinguin els costats iguals a aquests segments* [Prop. 22].

   Per poder-ho fer cal que dues circumferències es tallin com a la Prop. 1.

   Ara, però, imposa un diorisma: *Dos costats junts són més llargs que el tercer.* [Molt curiós aquest diorisma. És la condició necessària [i suficient] per tal que dues circumferències es tallin.]
3. Fa un triangle $\triangle DCE$ que té els costats iguals al $\triangle FAG$.
4. Usa la Prop. 8, que ha establert usant el moviment.

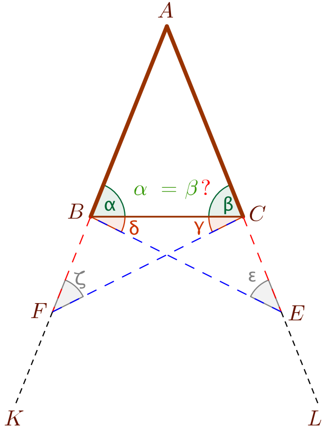
Grundlagen

III-4. *Considerem un angle* $\angle(h,k)$ *en un pla* α, *una recta* a' *en un pla* α' *i una de les regions de* α' *determinada per* a'. *Sigui* h' *un semiraig de* α' *que surt d'un punt* O' [*de* α']. *En el pla* α' ***existeix*** *un raig, i* ***només un***, k' *de manera que l'angle* $\angle(h,k)$ *sigui equivalent a* $\angle(h',k')$ *i tos els punts interiors de l'angle* $\angle(h',k')$ *estan situats en la regió que hem considerat respecte de* a'. *Simbòlicament,* $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$.

De la unicitat del transport d'angles i usant **III-5**, en resulta la **unicitat del transport de segments**.

Els *Elements*: una demostració directa

Elements



1. Per hipòtesi $AB = AC$.
2. Els prolonguem, AC fins al punt L i AB fins al punt K. [P 2]
3. Portem un mateix segment a CL i a BL a partir dels punts C i B. [E I 2]
4. Obtenim els segments CE i BF.
5. Per tant, els segments $AE = AC + CE$ i $AF = AB + BF$ són iguals. . [Nc 2]
6. Els triangles $\triangle AEB$ i $\triangle AFB$ són iguals. [E I 4]
7. Els angles $\alpha + \delta$ i $\beta + \gamma$, i ζ i ϵ són iguals, respectivament, i els costats BE i CF, també.
8. Per tant, els triangles $\triangle CEB$ i $\triangle BFC$ també E I 4
9. Per tant, els angles γ i δ també.
10. En definitiva, els angles β i α **ho són**. [Nc 3]

Grundlagen

És la proposició 11, una conseqüència immediata de **III-5** i **III-4**.

Els *Grundlagen*: els axiomes II

II-1. Quan un punt B està entre A i C, (A, B, C), i A, B i C són diferents, aleshores el punt B està entre C i A, (C, B, A).

II-2. Donats dos punts A i C, sempre n'hi ha almenys un, B, de la recta AC entre A i B.

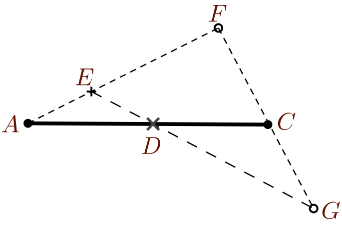
II-3. D'entre tres punts d'una recta només un està situat entre els altres dos.

II-4. Donats tres punts A, B i C no alineats i una recta a que no en conté cap d'ells, quan la recta passa per un punt del segment AB, passa també per un del segment i AC o BC.

Consqüència. *Els dos segments AC i BC no poden ser tallats per la recta a.*

Els *Grundlagen*: una demostració directa

Teorema 3. *Col·locat entre dos punts A i C, sempre* ***existeix almenys*** *un punt D en la recta AC.* [Un segment almenys té un punt entre els dos extrems, diferent d'ells.]



1. Hi ha un punt E fora de la recta AB. [**I-3**]
2. A AE hi ha un punt F de manera que el punt E es troba entre A i F. [**II-2**]
3. A FC hi ha un punt G de manera que el punt C es troba entre F i G. [**II-2**]
4. El punt G **no** està entre els punts F i C. [**II-3**]
5. La recta EG talla el segment AC en un punt D. [**II-4**]

Els *Elements*: una demostració indirecta

Pregunta. Si els angles a la base són iguals, el triangle és isòsceles?

La resposta és:

E I, **prop. 6**. *Tot triangle amb dos angles iguals és isòsceles.*

H, teor. 24. *Tot triangle amb dos angles iguals és isòsceles.*

[Tots dos usen una demostració indirecta, però ho fan diferent]

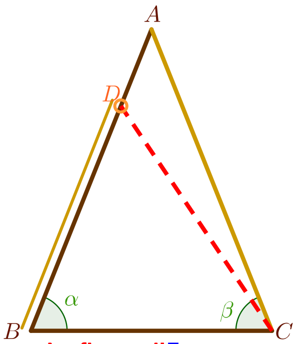
Demostració indirecta dels *Elements*:

Sigui $\triangle BAC$ un triangle amb els angles $\widehat{ABC}$ i $\widehat{ACB}$ iguals $\Big[$figura (a)$\Big]$.

Afirmo que els costat AB i AC són iguals.

Si **no** és així, són desiguals.

Per tant, un d'ells és **més gran** que l'altre. [hipòtesi auxiliar]



La figura d'Euclides

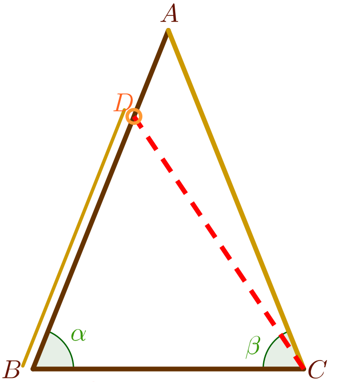
Els *Elements*: una demostració indirecta

Suposem, per exemple, que AB **és més gran que** AC.

Ara portem AC damunt de AB, a partir del punt B.

Obtenim el segment BD, que és igual a AC. [**E I, prop. 2**]

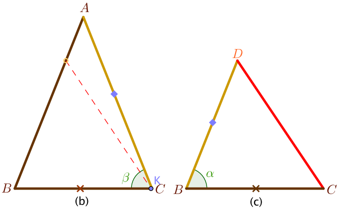
Unim els punts C i D. [**P 1**]



La figura d'Euclides

(a) := (b) + (c)

Els *Elements*: una demostració indirecta



Els triangles $\triangle DBC$ i $\triangle AGB$ són iguals perquè[, per hipòtesi,] tenen els angles $\widehat{DBC}$ i $\widehat{ACB}$ iguals,
i els costats respectius que els formen iguals:
DB igual a AC[, per construcció,]
i BC és comú [figures (b) i (c)].

[**E I, prop. 4**]

Per tant, el costat DC del triangle $\triangle DBC$ és igual al costat AB del triangle $\triangle BAC$
i els triangles $\triangle DBC$ i $\triangle BAC$ també **són iguals**. [**E I, prop. 4**]

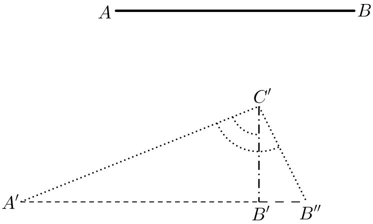
Impossible!, perquè el triangle $\triangle DBC$ **és dins** del triangle $\triangle BAC$.

[**reducció a l'absurd**]

D'això en resulta que la hipòtesi auxiliar **és falsa**, els costats AB i AC **no** són desiguals i, per tant, els costats AB i AC **són iguals**.

Els *Grundlagen*: una demostració indirecta

Teorema. *En el transport de segments hi ha* ***unicitat****.*



Suposem que el segment AB es transporta a un semiraig d'extrem A' de dues maneres, $A'B'$ i $A'B''$. [hipòtesi de l'absurd]

Sigui C' un punt exterior a la recta $A'B'$. **[I-3]**

Tenim:

a) $A'B' \equiv A'B''$. **[III-2]**

b) $A'C' \equiv A'C'$. **[III-1 i III-2]**

c) $\angle B'A'C' \equiv \angle B'A''$. **[per definició]**

Per tant, $\angle A'C'B' \equiv \angle A'B'C''$. **[III-5]**

Això contradiu **III-4** (La **unicitat** del transport de l'angle).

En conseqüència, el transport d'un segment és **únic**.